Ein wichtiger Beweis

Aufgabe:
Beweise den folgenden Satz, indem du die Lücken ausfüllst und die einzelnen Schritte kurz erläuterst / begründest. Zeichne zunächst eine Skizze der Funktion f (beliebiger Verlauf) in der du $J_a(x)$ als Fläche darstellst. Diese ist zur Erläuterung / Begründung oft sinnvoll.

Satz:
Sei f eine auf einem Intervall $I = [a;b] \subset \mathbb{D}_f$ stetige Funktion.
Dann gilt: $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist auf I differenzierbar und es gilt für alle $x \in I$: $J_a'(x) = f(x)$.
Kurz: $J_a(x)$ ist Stammfunktion von f.

Beweis:

1. Da f ________________ auf $I_h =$________________, existieren zwei Zahlen $m_h, M_h \in$ _____,

   so dass für alle $x \in$___________ gilt: $m_h \leq$________ $\leq$________ . (Minimum und Maximum auf I_h)

2. Die Fläche $\int_x^{x+h} f(t)dt$ kann daher eingeschachtelt werden durch die beiden _________-Flächen $m_h \cdot h$

   und _________ .

3. Das bedeutet: $m_h \cdot h \leq$ ____________________$\leq$____________ .

4. Nach __________ durch ___________ erhält man: $m_h \leq$____________$\leq$_____________ .

5. Da f ________ ist, folgt durch ____________________:

   $\lim\limits_{h \to 0}(m_h) \leq$____________ $\leq$ ______________ und daraus folgt:

6. $\lim\limits_{h \to 0}$______________ = ___________ . **q.e.d.**

Erläuterungen/Skizze:

$M_h \cdot h$	$[x, x+h]$	$M_h \cdot h$	$\mathbb{R}$
	h	I_h	$f(x)$
teilen	$J_a(x+h) - J_a(x)$	stetig	Grenzwertbildung
stetig	M_h	$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}$	Rechteck

$M_h \cdot h$	$[x, x+h]$	$M_h \cdot h$	$\mathbb{R}$
	h	I_h	$f(x)$
teilen	$J_a(x+h) - J_a(x)$	stetig	Grenzwertbildung
stetig	M_h	$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}$	Rechteck

$M_h \cdot h$	$[x, x+h]$	$M_h \cdot h$	$\mathbb{R}$
	h	I_h	$f(x)$
teilen	$J_a(x+h) - J_a(x)$	stetig	Grenzwertbildung
stetig	M_h	$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}$	Rechteck

$M_h \cdot h$	$[x, x+h]$	$M_h \cdot h$	$\mathbb{R}$
	h	I_h	$f(x)$
teilen	$J_a(x+h) - J_a(x)$	stetig	Grenzwertbildung
stetig	M_h	$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}$	Rechteck

$M_h \cdot h$	$[x, x+h]$	$M_h \cdot h$	$\mathbb{R}$
	h	I_h	$f(x)$
teilen	$J_a(x+h) - J_a(x)$	stetig	Grenzwertbildung
stetig	M_h	$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}$	Rechteck

$M_h \cdot h$	$[x, x+h]$	$M_h \cdot h$	$\mathbb{R}$
	h	I_h	$f(x)$
teilen	$J_a(x+h) - J_a(x)$	stetig	Grenzwertbildung
stetig	M_h	$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}$	Rechteck

$M_h \cdot h$	$[x, x+h]$	$M_h \cdot h$	$\mathbb{R}$
	h	I_h	$f(x)$
teilen	$J_a(x+h) - J_a(x)$	stetig	Grenzwertbildung
stetig	M_h	$\frac{J_a(x+h) - J_a(x)}{h}$	Rechteck